



MATEMATIKA

1. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ



1. a)		
A $2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 3 = 0$ másodfokú egyenletből.	1 pont	
$2^x = 3$ vagy $2^x = -0,5$.	1 pont	
$x = \log_2 3$ ($\approx 1,58$),	1 pont	
$2^x = -0,5$ nem lehetséges, mert $2^x > 0$ minden x -re.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

1. b)		
Ha a dobott számok átlaga 3,6, akkor a számok összege $5 \cdot 3,6 = 18$.	1 pont	
Ha pontosan két darab 2-es dobás van, akkor a másik három dobás összege 14.	1 pont	
Ezt 2-esek nélkül, különböző számokból csak a 3, 5, 6 dobások állítják elő.	1 pont	
Ha pontosan három darab 2-es dobás van, akkor a másik két dobás összege 12. Egy lehetőség van: 6, 6.	1 pont	
Négy (vagy öt) 2-es dobás nem lehetséges, mert $4 \cdot 2 = 8$, így az ötödik dobásnak 10-nek kellene lennie.	1 pont	
A dobott számötösök tehát: (2, 2, 3, 5, 6), (2, 2, 2, 6, 6).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül ad meg jó eredményeket, akkor azokért 1-1 pontot kapjon.

2. a)		
Az első csapat t óra alatt $20t$ kilométert tesz meg, távolságuk a C ponttól $ 50 - 20t $. A második csapat C ponttól vett távolsága hasonlóan írható fel: $ 30 - 14t $.	1 pont	
A feltétel alapján megoldandó az $ 50 - 20t = 2 \cdot 30 - 14t $ egyenlet.	1 pont	
(Három esetet vizsgálunk t értéke és az abszolútértékek argumentumainak előjele alapján.) 1. eset: Ha $t \leq \frac{15}{7}$, akkor $50 - 20t = 2 \cdot (30 - 14t)$,	1 pont *	
innen $t = 1,25$ (óra).	1 pont *	
2. eset: Ha $\frac{15}{7} < t \leq 2,5$, akkor $50 - 20t = 2 \cdot (14t - 30)$,	1 pont *	
innen $t = \frac{55}{24} \approx 2,29$ (óra).	1 pont *	
3. eset: Ha $2,5 < t$, akkor $20t - 50 = 2 \cdot (14t - 30)$,	1 pont *	
innen $t = 1,25$ (óra). Ez az érték nem felel meg a feltételnek, ekkor tehát nem kapunk megoldást.	1 pont*	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel: – Ha $t = 1,25$, akkor az első csapat $20 \cdot 1,25 = 25$ km-t tett meg, távolságuk C -től $50 - 25 = 25$ (km). A második csapat $14 \cdot 1,25 = 17,5$ km-t tett meg, távolságuk C -től $30 - 17,5 = 12,5$ (km); s ez valóban fele az első csapat C -től vett távolságának. – Hasonlóan a másik értékre is.	1 pont	
Tehát $1,25$ óra, illetve $\approx 2,29$ óra múlva lesz az első csapat kétszer távolabb a C ponttól, mint a második.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

A *-gal jelölt 6 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:

A két argumentum előjele vagy megegyezik, vagy különbözik.	2 pont	<i>Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az első esetben $50 - 20t = 2 \cdot (30 - 14t)$,	1 pont	
ennek megoldása $t = 1,25$ (óra).	1 pont	
A második esetben $50 - 20t = 2 \cdot (14t - 30)$,	1 pont	
innen $t = \frac{55}{24} \approx 2,29$ (óra).	1 pont	

2. b)		
Jelölje x az első csapat létszámát, ekkor a csapatban a szemüveges lányok száma $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} x = \frac{x}{10}$.	1 pont	
A második csoport létszáma $2x$, itt a szemüveges lányok száma $0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{2x}{5}$.	1 pont	
A szemüveges lányok száma $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} = \frac{x}{2}$,	1 pont	
ami az összes túra $\frac{\frac{x}{2}}{x+2x} = \frac{1}{6}$ része.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

3. a)		
(A vektorok osztásarány-tételét alkalmazzuk, helyvektorokkal dolgozunk. A szokásos jelölésekkel $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ stb.) $\underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = \frac{(-8; 24) + (48; 16)}{2} = (20; 20)$.	1 pont	
$\underline{d} = \frac{3\underline{c} + \underline{f}}{4} = \frac{(20; 20)}{4} = (5; 5)$.	1 pont	
$\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a} = (5; 5) - (-8; 24) = (13; -19)$.	1 pont	
$\overrightarrow{AF} = \underline{f} - \underline{a} = (20; 20) - (-8; 24) = (28; -4)$.	1 pont	
Jelölje φ a két vektor szögét. A skaláris szorzatot kétféleképpen felírva	1 pont *	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{13^2 + (-19)^2} \cdot \sqrt{28^2 + (-4)^2} \cdot \cos\varphi$	1 pont *	
$= 13 \cdot 28 + (-19) \cdot (-4) = 440$	1 pont *	
Innen $\cos\varphi = \frac{440}{\sqrt{530} \cdot \sqrt{800}} \approx 0,6757$,	1 pont *	
$\varphi \approx 47,49^\circ$. (A két vektor szöge nem nagyobb, mint 180° .)	1 pont *	
Összesen:	9 pont	

A *-gal jelölt 5 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:

$\overrightarrow{DF} = \underline{f} - \underline{d} = (20; 20) - (5; 5) = (15; 15).$	1 pont	
Az ADF háromszög oldalainak hossza $AD = \sqrt{13^2 + (-19)^2} = \sqrt{530},$ $AF = \sqrt{28^2 + (-4)^2} = \sqrt{800},$ $DF = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{450}.$	1 pont	
Jelölje φ \overrightarrow{AD} és \overrightarrow{AF} szögét. Az ADF háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $\cos\varphi = \frac{530 + 800 - 450}{2 \cdot \sqrt{530} \cdot \sqrt{800}},$	1 pont	
innen $\cos\varphi \approx 0,6757,$	1 pont	
$\varphi \approx 47,49^\circ.$ (A két vektor szöge nem nagyobb, mint 180° .)	1 pont	

3. b) első megoldás		
Elegendő megmutatni, hogy $ACB\angle = 90^\circ.$ (A Thalész-tétel, illetve annak megfordítása miatt.)	1 pont	
$CA = \sqrt{(-8)^2 + 24^2} = \sqrt{640},$ $CB = \sqrt{48^2 + 16^2} = \sqrt{2560},$	1 pont	
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (48; 16) - (-8; 24) = (56; -8);$	1 pont	
$AB = \sqrt{56^2 + (-8)^2} = \sqrt{3200}.$	1 pont	
Mivel $CA^2 + CB^2 = 640 + 2560 = 3200 = AB^2,$ a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

3. b) második megoldás		
Elegendő megmutatni, hogy pl. \vec{CA} -90° -os elforgatottja párhuzamos \vec{CB} -vel.	1 pont	
(\vec{CA} -90° -os elforgatottja =) $\vec{CA}^{-90^\circ} = (24; 8)$.	1 pont	
Mivel $\vec{CB} = (48; 16)$, így $\vec{CB} = 2 \cdot \vec{CA}^{-90^\circ}$,	1 pont	
\vec{CB} és \vec{CA}^{-90° párhuzamosak,	1 pont	
vagyis \vec{CA} és \vec{CB} valóban merőlegesek.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

3. b) harmadik megoldás		
$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (48; 16) - (-8; 24) = (56; -8)$;	1 pont	
$AB = \sqrt{56^2 + (-8)^2} = \sqrt{3200}$.	1 pont	
Az AB átmérőjű kör középpontja $F(20; 20)$, sugara $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3200}}{2} = \sqrt{800}$.	1 pont	
A kör egyenlete $(x - 20)^2 + (y - 20)^2 = 800$.	1 pont	
A C pont koordinátáit behelyettesítjük: $(0 - 20)^2 + (0 - 20)^2 = 800$, így C valóban a körön van.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

3. b) negyedik megoldás		
Elegendő megmutatni, hogy $\angle ACB = 90^\circ$ (a Thalész-tétel, illetve annak megfordítása miatt);	1 pont	
azaz elegendő igazolni, hogy \vec{CA} és \vec{CB} merőlegesek, vagyis skalárszorzatuk nulla.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\vec{CA} = \underline{a} = (-8; 24)$, $\vec{CB} = \underline{b} = (48; 16)$.	1 pont	
$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-8; 24) \cdot (48; 16) = -8 \cdot 48 + 24 \cdot 16 =$	1 pont	
$= 0$. A két vektor valóban merőleges.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

4. a) első megoldás		
Ha Attila csapattag, de Balázs nem, akkor $\binom{8}{5}$ - féle csapatösszeállítás lehetséges. Ha Balázs csapattag, de Attila nem, akkor szintén $\binom{8}{5}$ -féle csapatösszeállítás lehetséges.	1 pont	
Ha mindketten csapattagok, akkor a másik négy személy $\binom{8}{4}$ -féleképpen választható ki.	1 pont	
Összesen tehát: $2 \cdot \binom{8}{5} + \binom{8}{4} =$	1 pont	
$= 112 + 70 = 182$ -féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. a) második megoldás		
Összesen $\binom{10}{6}$ -féle csapatösszeállítás lehetséges.	1 pont	
Ebből nem megfelelőek azok, amelyekben sem Attila, sem Béla nem szerepel,	1 pont	
ezenek száma $\binom{8}{6}$.	1 pont	
Összesen $\binom{10}{6} - \binom{8}{6} = 182$ -féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. a) harmadik megoldás		
$\binom{9}{5}$ esetben csapattag Attila, és hasonlóan $\binom{9}{5}$ esetben csapattag Béla.	1 pont	
E két szám összegéből le kell vonni azoknak a kétszer számolt csapatösszeállításoknak a számát, amikor mindketten csapattagok.	1 pont	
Ezenek száma $\binom{8}{4}$,	1 pont	
összesen tehát $2 \cdot \binom{9}{5} - \binom{8}{4} = 182$ -féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. b)		
Az I. esetben összesen 6·5·4 ajándékkiosztási lehetőség van.	1 pont *	
Kati háromféle ajándékot nyerhet, és a másik két ajándékot 5·4-féleképpen nyerhetik meg a többiek.	1 pont *	
Így 3·5·4-féleképpen sorsolhatják Katit.	1 pont *	
Kati $\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$ eséllyel kap ajándékot az I. esetben.	1 pont *	
A II. esetben 6 ³ -féle kiosztás lehetséges.	1 pont	
Azon esetek száma, amikor Kati nem kap ajándékot 5 ³ .	1 pont	
A kérdéses valószínűség $1 - \frac{5^3}{6^3} =$	1 pont	
$= \frac{91}{216} (\approx 0,42).$	1 pont	
Összesen:	8 pont	

A *-gal jelölt 4 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:

Az I. esetben az ajándékok 6·5·4-féleképpen oszthatók ki.	1 pont	
Ha Kati nem kap ajándékot, akkor 5·4·3-féle kiosztás lehetséges;	1 pont	
így Kati $1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$ eséllyel kap ajándékot az első esetben.	2 pont	

5. a) első megoldás		
A belső szögfelezőtétel miatt $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$.	1 pont	
Legyen $BD = 2x$, $DC = 3x$.	1 pont	
($BAC\angle = \alpha$. A BAD és DAC háromszögekben koszinusztétellel:) $\left. \begin{aligned} (2x)^2 &= 42^2 + 39^2 - 2 \cdot 42 \cdot 39 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ (3x)^2 &= 39^2 + 63^2 - 2 \cdot 39 \cdot 63 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$	2 pont	
$\left. \begin{aligned} 4x^2 &= 3285 - 3276 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \text{azaz} \\ 9x^2 &= 5490 - 4914 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$	1 pont	
(Az első egyenlet 9-szereséből kivonjuk a második egyenlet 4-szeresét:) $0 = 7605 - 9828 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$	1 pont *	
$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{7605}{9828} \left(= \frac{65}{84} \right)$	1 pont *	
$\frac{\alpha}{2} \approx 39,30^\circ, \alpha \approx 78,61^\circ$ $(0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ)$	1 pont *	
Visszahelyettesítve $4x^2 = 750$, $x \approx 13,69$,	1 pont *	
$BC = 5x \approx 68,47$ (m), (a kívánt pontossággal tehát) a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont *	
Összesen:	10 pont	

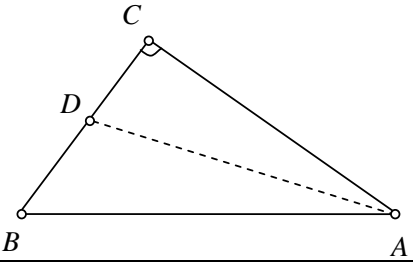
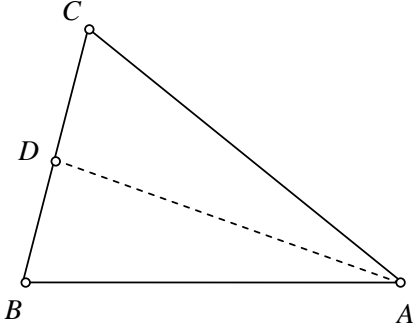
A *-gal jelölt 5 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:

Mindkét egyenletből kifejezzük $\cos \frac{\alpha}{2}$ -t: $\frac{3285 - 4x^2}{3276} = \frac{5490 - 9x^2}{4914},$	1 pont	
$x^2 = 187,5$, $x \approx 13,69$ (m).	1 pont	
$BC = 5x \approx 68,47$ (m), (a kívánt pontossággal tehát) a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont	
Az első egyenletből $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3285 - 4x^2}{3276} = \frac{3285 - 750}{3276} \left(= \frac{65}{84} \right).$	1 pont	
Az egyenlet megoldása $\frac{\alpha}{2} \approx 39,30^\circ$, $\alpha \approx 78,61^\circ$. $(0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ)$	1 pont	

5. a) második megoldás

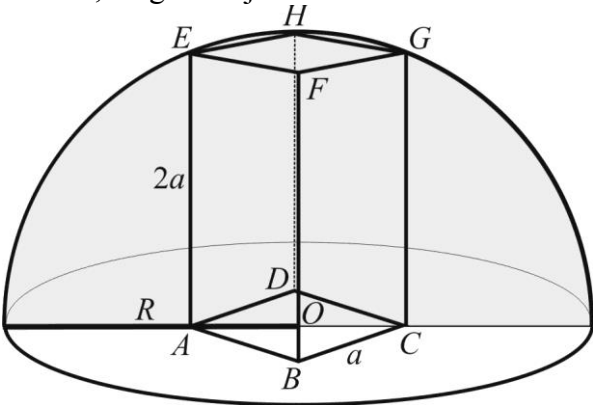
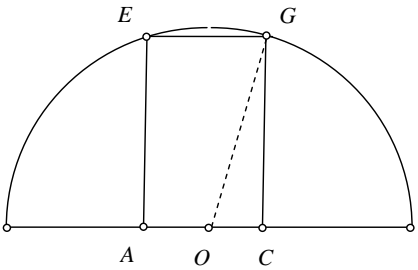
$(BAC \angle = \alpha.) t_{ABC} = t_{ABD} + t_{ADC}$, így $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{AD \cdot AC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2}.$	2 pont	<i>Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\frac{42 \cdot 63 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{42 \cdot 39 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{39 \cdot 63 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \Leftrightarrow$ $\sin \alpha = \frac{65}{42} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$	1 pont	
Mivel $\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$,	1 pont	
így $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{65}{84}$. ($\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ nem lehet.)	1 pont	
Az egyenlet megoldása: $\frac{\alpha}{2} \approx 39,30^\circ$, $\alpha \approx 78,61^\circ$. $(0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ)$	1 pont	
Felírhatjuk a koszinusztételt: $(BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha)$: $BC^2 = 42^2 + 63^2 - 2 \cdot 42 \cdot 63 \cdot \cos 78,61^\circ.$	2 pont	
$BC \approx 68,47$ (m);	1 pont	
(a kívánt kerekítéssel tehát) a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

5. b)

			2 pont	
			1 pont	
	<p>Tetszőleges ABC háromszögben az AD szögfelező behúzásakor a D pontnál keletkező szögek közül nem lehet mindkettő hegyesszög.</p>		1 pont	
	<p>Legyen pl. az ADC szög derékszög vagy tompaszög, ekkor az ADC háromszögben $AC > AD$,</p>		1 pont	
	<p>mert nagyobb szöggel szemben fekvő oldal van.</p>		1 pont	
	<p>Így Csillának van igaza.</p>		1 pont	
Összesen:			6 pont	

6. a)				
<p>Jelölje a három számot $a - d, a, a + d, (a, d > 0)$.</p>	1 pont			
<p>Ekkor</p> $\left. \begin{aligned} (a + d)^3 + (a - d)^3 &= 1072, \\ (a + d)^2 - (a - d)^2 &= 32d. \end{aligned} \right\}$	2 pont			
<p>Az első egyenletből $2a^3 + 6ad^2 = 1072$.</p>	1 pont			
<p>$(a^3 + 3ad^2 = 536)$</p>	1 pont			
<p>A második egyenletből $4ad = 32d$,</p>	1 pont			
<p>így $a = 8 (d \neq 0)$.</p>	1 pont			
<p>Ezt az első egyenletbe írva $512 + 24d^2 = 536$,</p>	1 pont			
<p>$d = 1. (d = -1$ nem lehetséges.)</p>	1 pont			
<p>A három szám 7, 8, 9.</p>	1 pont			
<p>Ellenőrzés: $7^3 + 9^3 = 1072$ és $9^2 - 7^2 = 32 \cdot 1$.</p>	1 pont			
Összesen:			10 pont	

6. b)		
A négy szám mediánja akkor lehet 5, ha a két középső szám 4 és 6, vagy 3 és 7, vagy 2 és 8.	2 pont	
Az első esetben 3, a másodikban 2, a harmadikban pedig 1-féle lehet a legkisebb szám (a legnagyobb adott).	2 pont	A lehetséges számnégyesek: 1, 4, 6, 9 2, 4, 6, 9 3, 4, 6, 9 2, 3, 7, 9 1, 3, 7, 9 1, 2, 8, 9
Férinek összesen 6 lehetséges tippje van, melyekre egyenlő valószínűséggel gondolhatott Enikő.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{6}$.	1 pont	<i>Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	6 pont	

7. a)		
<p>Jó ábra, megfelelő jelölésekkel:</p> 	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó térhatású ábra nélkül jól dolgozik.</i>
<p>Az ábra szerinti $ABCDEFGH$ hasáb $ABCD$ alaplapjának O középpontja egyúttal a félgömb középpontja is. Az $ACGE$ sík átmegy a félgömb középpontján, így abból egy főkört metsz ki, és $ACGE$ ebben a főkörben egy beírt téglalap. A főkör OG sugara egyúttal a félgömb sugara is.</p>	1 pont	<i>Kevésbé részletezett indoklás is elfogadható.</i>
 <p>(Jelölje a félgömb sugarát R, a hasáb alapélének hosszát a, ekkor az oldalél hossza $2a$.) Az $ABCD$ négyzet átlója $AC = \sqrt{2}a$ hosszú, OC hossza pedig $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.</p>	1 pont	
<p>Az OCG derékszögű háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét:</p>	1 pont	
$R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + (2a)^2 = \frac{9}{2}a^2.$	1 pont	
$a = \frac{\sqrt{2}}{3}R = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ (cm)},$	1 pont	
$b = 2a \approx 14,14 \text{ (cm)}$ a hasáb éleinek hossza.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

7. b)		
<p>A hasáb alapélének és oldalélének hossza (centiméterben mérve) a, illetve b. A hasáb felszíne $2a^2 + 4ab$,</p>	1 pont	

térfogata a^2b .	1 pont																					
$2a^2 + 4ab = a^2b$, $2a + 4b = ab$ (a és b egész számok, $a \neq 0$).	1 pont																					
Az egyenletet rendezzük és szorzattá alakítjuk: $ab - 4b - 2a = 0$, $b(a - 4) - 2(a - 4) = 8$, $(a - 4)(b - 2) = 8$.	2 pont *																					
A tényezők 8 pozitív osztói,	1 pont *	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>																				
<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>$a - 4$</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>$b - 2$</td> <td>8</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </table> <p>így a lehetséges megoldások:</p> <table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>a</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>10</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </table> <p>(A tényezők nem lehetnek negatívak: $b - 2 = -1$ lehet csak, de ekkor $a - 4 = -8$ lenne.)</p>	$a - 4$	1	2	4	8	$b - 2$	8	4	2	1	a	5	6	8	12	b	10	6	4	3	3 pont	<i>3 megoldás esetén 2 pont, 2 megoldás esetén 1 pont jár. Kettőnél kevesebb megoldás esetén nem jár pont.</i>
$a - 4$	1	2	4	8																		
$b - 2$	8	4	2	1																		
a	5	6	8	12																		
b	10	6	4	3																		
Összesen:	9 pont																					

A *-gal jelölt 3 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetre is megkaphatja:

Az egyenletből kifejezzük pl. a -t: $ab - 4b - 2a = 0$, $a(b - 2) = 4b$, $a = \frac{4b}{b - 2} = 4 + \frac{8}{b - 2}$.	2 pont	
$(b - 2)$ a 8 pozitív osztója,	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>

8. a)		
I. miatt a két egyenes meredekségének szorzata -1 . (Egyik egyenes sem párhuzamos a koordináta-tengelyekkel.)	1 pont	
I. és II. miatt $g(x) = mx + 3$,	1 pont	
$h(x) = -\frac{1}{m}x + 3$.	1 pont	
$(g \circ h)(x) = m \cdot \left(-\frac{1}{m}x + 3\right) + 3$	1 pont	
$= -x + 3m + 3$.	1 pont	
III.-ből $-x + 3m + 3 = 0$, ha $x = 9$;	1 pont	
$-9 + 3m + 3 = 0$, $m = 2$.	1 pont	
A g és h függvények hozzárendelési szabálya tehát: $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.	2 pont	
$f(x) = (2x + 3)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$,	1 pont	
amivel igazoltuk az állítást.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

8. b)		
Az f függvény érintője meredekségének meghatározásához az f függvényt deriváljuk.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f'(x) = -2x + \frac{9}{2}$,	1 pont	
$f'(2) = \frac{1}{2}$ (a keresett érintő meredeksége).	1 pont	
$f(2) = 14$,	1 pont	
így az érintő egyenlete: $y - 14 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$. (Vagy másik alakban: $y = \frac{1}{2}x + 13$.)	1 pont	
Összesen:	5 pont	

9. a)		
(A két szomszédos pozitív egész szám legyen n és $n + 1$.) Be kell látnunk, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$.	1 pont	
Közös nevezőre hozva $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$,	1 pont	
így az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9. b) első megoldás		
A nevezők első tényezői olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 10 és differenciája 2.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ezért a végtelen sor n -edik tagja $\frac{1}{(8+2n) \cdot (10+2n)}$ alakú.	1 pont	
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$i) n = 1$ -re az állítás igaz: $S_1 = \frac{1}{100+20} = \frac{1}{10 \cdot 12}$	1 pont	
$ii)$ Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $\frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(8+2k) \cdot (10+2k)} = \frac{k}{100+20k}$.	1 pont	
$iii)$ Ekkor igazolandó, hogy az állítás $n = (k+1)$ -re is igaz, azaz $\frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(8+2k) \cdot (10+2k)} + \frac{1}{(10+2k) \cdot (12+2k)} = \frac{k+1}{100+20(k+1)}$.	1 pont	
Az indukciós feltevést felhasználva a bal oldal $\frac{k}{100+20k} + \frac{1}{(10+2k) \cdot (12+2k)} = \frac{k(12+2k)+10}{(100+20k)(12+2k)} = \frac{k^2+6k+5}{20(5+k)(6+k)}$, igazolandó tehát a	2 pont	
$\frac{k^2+6k+5}{20 \cdot (5+k)(6+k)} = \frac{k+1}{120+20k} = \frac{k+1}{20 \cdot (6+k)}$ összefüggés.	1 pont	
A közös nevezővel szorozva a	1 pont	

$k^2 + 6k + 5 = (k + 1)(k + 5)$ azonosság adódik, így az állítást igazoltuk.		
Összesen:	10 pont	

9. b) második megoldás		
A nevezők első tényezői olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 10 és differenciája 2.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ezért a végtelen sor n -edik tagja $\frac{1}{(8+2n) \cdot (10+2n)}$ alakú.	1 pont	
$\frac{1}{8+2n} - \frac{1}{10+2n} = \frac{10+2n - (8+2n)}{(8+2n) \cdot (10+2n)} = \frac{2}{(8+2n) \cdot (10+2n)}$, így	2 pont	<i>Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\frac{1}{(8+2n) \cdot (10+2n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8+2n} - \frac{1}{10+2n} \right)$.	1 pont	
$\frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(8+2n) \cdot (10+2n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{8+2n} - \frac{1}{10+2n} \right)$.	2 pont	
A közbülső tagok kiesnek, az első és utolsó tag nem.	1 pont	
$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10+2n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{10 \cdot (10+2n)} \right)$,	1 pont	
$S_n = \frac{n}{100+20n}$. Az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

9. c)		
(A nevező legmagasabb kitevőjű változójával osztunk minden tagot:) $S_n = \frac{n}{100+20n} = \frac{1}{\frac{100}{n} + 20}$.	1 pont	
Mivel $\frac{100}{n}$ nullához tart, (a határértékre vonatkozó műveleti szabályok miatt)	1 pont	
$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{20}$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	