74 EGYENLŐTLENSÉGEK

BEVEZETŐ FELADAT

Hány évesek lehetnek az ötös ikrek, ha tudjuk, hogy 12 év múlva sem éri el az életkoruk összege a 100-at?

Megoldás
Ha most x évesek, akkor 12 év múlva $x + 12$ évesek lesznek, az életkoruk összege pedig 5-ször ennyi lesz. A feladat szerint $5(x + 12) < 100$. Egy egyenlőtlenséget kaptunk, a mérlegelvvel oldjuk meg:

$$5(x+12) < 100 \qquad / :5$$
$$x + 12 < 20 \qquad / -12$$
$$x < 8.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy az ikrek még nem érték el a 8 évet.

Ellenőrzés
Ha most 8 évesek lennének, akkor 12 év múlva az életkoruk összege $5 \cdot 20 = 100$ lenne. Ha pedig már most 8 évesnél idősebbek lennének, akkor ez az összeg 100-nál nagyobb szám lenne.

ELMÉLET

Az egyenlőtlenségek megoldására is használhatjuk a **mérlegelvet**. Ez azt jelent, hogy **az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza nem változik meg**, ha a $<, >, \leq, \geq$ jel két oldalán álló kifejezést (számot)
– ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
– ugyanazzal a **pozitív** számmal megszorozzuk vagy elosztjuk.
Ha negatív számmal szorozzuk az egyenlőtlenséget, akkor a relációs jelet is meg kell fordítanunk, így már ugyanazok lesznek a megoldások.
VIGYÁZAT! Ez különösen akkor jelent gondot, ha olyan kifejezéssel szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenséget, amelyben ismeretlen van! (pl. $x + 3$, $2x - 1$, stb.) Ilyenkor általában szét kell választani két esetre aszerint, hogy pozitív vagy negatív az, amivel szorzunk.
Összefoglalva tehát a MÉRLEGELV alkalmazását:

	Egyenlet	Egyenlőtlenség
Hozzáadni, kivonni bármit	szabad	szabad
Szorozni, osztani pozitív számmal	szabad	szabad
Szorozni, osztani negatív számmal	szabad	NEM SZABAD
Szorozni, osztani negatív számmal ÉS megfordítani a relációs jelet	–	szabad
Osztani 0-val	TILOS	TILOS
Szorozni, osztani olyan kifejezéssel, amelyben ismeretlen van	Ellenőrizni kell, hogy amivel szorzunk, az nem lehet 0.	Ellenőrizni kell, hogy amivel szorzunk, az nem lehet 0, ÉS szétválasztani az eseteket aszerint, hogy amivel szorzunk, az pozitív vagy negatív

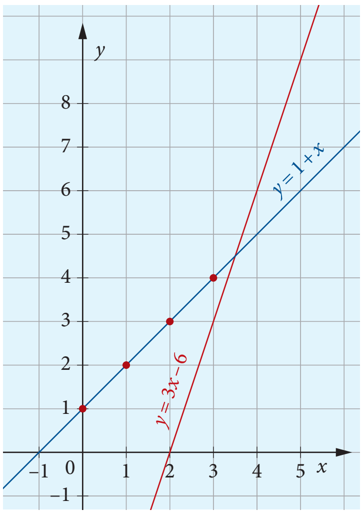
GYAKORLÓFELADAT

1. Oldd meg a mérlegelv alkalmazásával az egyenlőtlenségeket!

a) $-23 - 8x < -15(-7 - 8x)$ **b)** $5(x+2)^2 - 8x \geq 5x^2 + 12x$ **c)** $\frac{3-5x}{5} - \frac{5-4x}{10} \geq -\frac{7}{20}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A grafikon alapján döntsük el, melyik természetes számokra igaz, hogy $1 + x \geq 3x - 6$!



Megoldás

Olyan pontokat kell keresnünk az $y = 1 + x$ egyenletű egyenesen, amelyeknek **első koordinátája** természetes szám, **és** amelyekhez legalább akkora második koordináta tartozik, mint az $y = 3x - 6$ egyenes megfelelő pontjaihoz.

Négy ilyen pont van: (0; 1), (1; 2), (2; 3) és (3; 4).

Tehát az **N** alaphalmazon az $1 + x \geq 3x - 6$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza: {0; 1; 2; 3}.

Megjegyzés

Az $1 + x \geq 3x - 6$ egyenlőtlenséget algebrai úton is megoldhatjuk.

A mérlegelvet használjuk:

$1 + x \geq 3x - 6 \quad / - 3x - 1$

$-2x \geq -7 \quad / : (-2)$

$x \leq 3{,}5.$

Az utolsó lépésnél a ≥ jelet ≤-re változtattuk. Azt kaptuk, hogy az x természetes számnak 3,5-nél kisebbnek kell lennie. Négy ilyen természetes szám van, a 0, az 1, a 2 és a 3.

2. Van-e olyan, legfeljebb 21 cm kerületű háromszög, amelynek oldalai (cm-ben mérve) x, $x + 4$ és $x + 8$ hosszúak?

Megoldás

A kívánt tulajdonságú háromszög létezéséhez három feltételnek kell teljesülnie:

$x > 0$ **és** $x + (x + 4) + (x + 8) \leq 21$ (a kerület miatt) **és** $x + 8 < x + (x + 4)$ (a háromszög-egyenlőtlenség miatt).

Meg kell oldanunk a következő egyismeretlenes **egyenlőtlenség-rendszert**:

$x > 0$ **és** $3x + 12 \leq 21$ **és** $x + 8 < 2x + 4$.

A második egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva: $x \leq 3$.

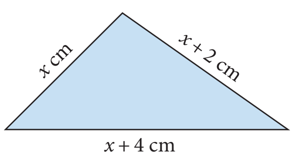
A harmadik egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva: $4 < x$.

Olyan pozitív szám azonban nincs, amely 3-nál nem nagyobb és ugyanakkor 4-nél nagyobb.

Nincs tehát a szövegnek megfelelő háromszög.

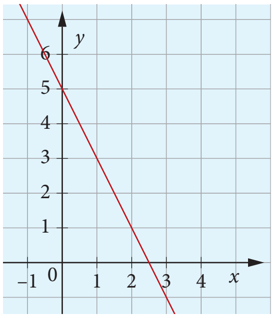
GYAKORLÓFELADAT

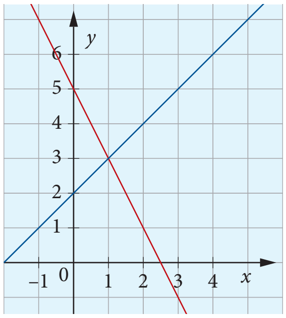
2. Hány olyan, legfeljebb 21 cm kerületű háromszög létezik, amelynek oldalai (cm-ben mérve) x, $x + 2$ és $x + 4$ hosszúak? Hány olyan van ezek között, amelyekre $x \in$ **N**?

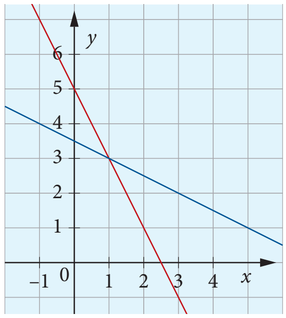


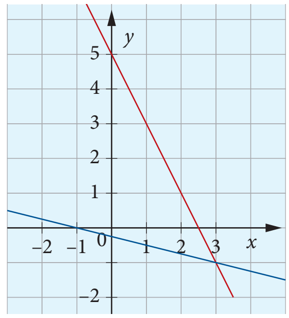
3. A grafikonok segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán, majd a valós számok halmazán is!

a) $0 \le 5 - 2x$ **b)** $x + 2 \le 5 - 2x$ **c)** $5 - 2x > 3{,}5 - 0{,}5x$ **d)** $\frac{-x-1}{4} \le 5 - 2x$







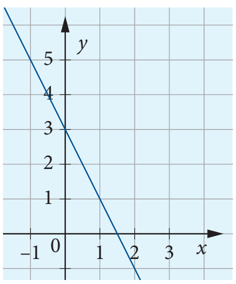


HÁZI FELADAT

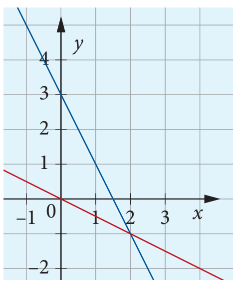
1. Hajninak biológiából öt osztályzata van, ezek átlaga 3,8. Hány ötöst kell szereznie, hogy az átlaga 4,3-nél nagyobb legyen? Oldd meg módszeres próbálkozással és egyenlőtlenséggel is!

2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán a grafikonok segítségével!

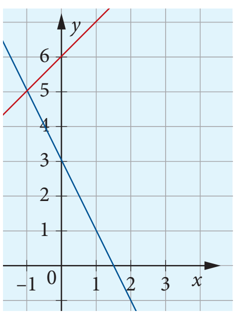
a) $0 \ge 3 - 2x$



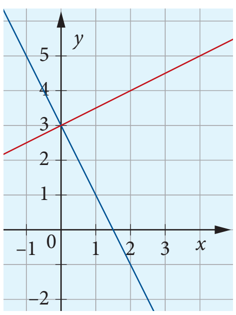
c) $3 - 2x > -0{,}5x$



b) $3 - 2x < 6 + x$



d) $\frac{x+6}{2} \le 3 - 2x$



3. Szociális segély igénylésekor a jogosultság egyik feltétele az egy főre jutó jövedelem. A család „létszámát” így határozzák meg: igénylő 1,2, igénylő házastársa 0,9, gyerekenként 0,8. (Tehát egy 3 fős család „létszáma”: $1{,}2 + 0{,}9 + 0{,}8 = 2{,}9$.) Akkor részesülhet a család szociális segélyben, ha a család összjövedelmének és a család fentebb leírt módon kiszámított „létszámának” hányadosa nem haladja meg a 26 500 tallért.
Az egyik igénylőnek és házastársának két gyermeke volt, és csak a harmadik gyermekük megszületése után váltak jogosulttá a szociális segélyre. Mennyi lehetett a család összjövedelme, ha az a harmadik gyermek megszületésekor, a gyermek után járó 13 000 tallér családi pótlékkal nőtt?

4. Oldd meg az egyenlőtlenség-rendszereket!

a) $5 - x < 0$ és $x - 8 \le 0$

b) $5 - 4x \ge 7$ és $\frac{x+3}{2} \ge 0$

c) $\frac{4x+5}{9} < 1$ és $\frac{14-3x}{4} < x$

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

FELADAT

1. Hány gyöke van a $(c^2 - 9)x = c^3 + 27$ egyenletnek a c paraméter különböző értékei esetén?

Megoldás

Alakítsuk szorzattá a $c^2 - 9$ és a $c^3 + 27$ kifejezéseket!

$c^2 - 9 = (c + 3)(c - 3)$ és $c^3 + 27 = (c + 3)(c^2 - 3c + 9)$, ezért az adott egyenlet így is felírható:

$(c + 3)(c - 3)x = (c + 3)(c^2 - 3c + 9)$.

A mérlegelvet szeretnénk használni, osztanánk az x együtthatójával. Ezt azonban csak akkor tehetjük meg, ha az nem egyenlő 0-val. Ebben az esetben $x = \frac{(c+3)(c^2-3c+9)}{(c+3)(c-3)} = \frac{c^2-3c+9}{c-3}$.

Ha például $c = 5$, akkor az egyenlet gyöke $\frac{5^2 - 3 \cdot 5 + 9}{5-3} = \frac{19}{2} = 9{,}5$.

Ha azonban $(c + 3)(c - 3) = 0$, akkor ez az osztás nem végezhető el. Ezt az esetet külön meg kell vizsgálnunk.

$(c + 3)(c - 3) = 0$, ha $c + 3 = 0$, vagy $c - 3 = 0$, más esetekben $(c + 3)(c - 3) \neq 0$.

Ha $c + 3 = 0$,	akkor $c = -3$,	az egyenlet: $0 \cdot x = 0$,	megoldáshalmaza: **R**.
Ha $c - 3 = 0$,	akkor $c = 3$,	az egyenlet: $0 \cdot x = 54$,	megoldáshalmaza: Ø.

Tehát az adott egyenletnek nincs gyöke, ha $c = 3$,

egy gyöke van (a $\frac{c^2-3c+9}{c-3}$), ha c valós szám, de nem a 3 és nem a -3,

végtelen sok gyöke van, ha $c = -3$.

2. Oldd meg a következő paraméteres egyenleteket (a p paraméter)!

a) $2px - 3p = 2 - 5px$

b) $px + 5x = p^2 + 10p + 25$

c) $p^2x - p^2 = 10p + 25(x + 1)$

d) $(p + 3)(p - 3)x = p^2x - 63$

3. Hogyan kell megválasztanunk a 2. feladat részeiben a p paraméter értékét, ha azt akarjuk, hogy adott egyenletnek egy gyöke legyen, mégpedig egy 3-nál nagyobb szám?

4. A p paraméter megválasztásától függően hány gyökük van a következő egyenleteknek? (A megoldáshoz rajzold meg az $x \mapsto |x| + |x - 5|$ függvény grafikonját!)

a) $|x| + |x - 5| = p$

b) $|x| + |x - 5| = px$

c) $|x| + |x - 5| = px + 10$

d) $|x| + |x - 5| = -px + 10$