110 SZÁMTANI KÖZÉP, MÉRTANI KÖZÉP

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Januárban Antal és Benő is 150 ezer forint nettó bért kapott, márciusban pedig mindketten 216 ezer forintot. Antal bére februárban és márciusban is ugyanannyival növekedett, Benő bére pedig mindkét hónapban ugyanannyiszorosára nőtt. Melyikük kapott több bért februárban?

Megoldás

Antal februári bére *annyival* több a januári bérénél, *amennyivel* a márciusi bére több a februárinál. Ha tehát a februári bére x Ft, akkor $x - 150 = 216 - x$. Ebből $2x = 150 + 216$, vagyis Antal februári bére $x = \frac{150 + 216}{2} = 183$ ezer forint.

Ez éppen a januári és a márciusi bérének a **számtani közepe**.

Benő februári bére *annyiszorosa* a januári bérének, *ahányszorosa* a márciusi bére a februárinak. Ha a februári bére y Ft, akkor $\frac{y}{150} = \frac{216}{y}$. Ebből $y^2 = 150 \cdot 216$, vagyis $y = \sqrt{150 \cdot 216} = 180$ ezer forint.

Antal több bért kapott februárban, mint Benő.

Megjegyzés

A $\sqrt{150 \cdot 216} = 180$ számot a 150 és a 216 *mértani (geometriai) közepének* nevezzük. A 150 és a 216 számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük.

2. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a cm és b cm. Hány cm annak a négyzetnek az oldala, amelynek a téglalapéval megegyező

a) a kerülete, **b)** a területe?

Megoldás

a) Legyen a keresett négyzet oldala x cm. A téglalap kerülete $(2a + 2b)$ cm, a négyzet kerülete $4x$ cm. A kerületek egyenlők: $4x = 2a + 2b$. A négyzet oldala tehát $x = \frac{a+b}{2}$ cm hosszú, azaz a téglalap két szomszédos oldala hosszának **számtani közepe**.

b) Legyen a keresett négyzet oldala y cm. A téglalap területe $(a \cdot b)$ cm^2, a négyzet területe y^2 cm^2. A területek egyenlők: $y^2 = a \cdot b$. Melyik pozitív számnak a négyzete az $a \cdot b$? A $\sqrt{a \cdot b}$-nek. Tehát $y = \sqrt{a \cdot b}$.

Eszerint a négyzet oldala $\sqrt{a \cdot b}$ cm hosszúságú.

ELMÉLET

A bevezető példákban három matematikai fogalommal találkoztunk: négyzetgyök, számtani közép, mértani közép.

1. A négyzetgyökről már tanultunk:

Egy a pozitív szám **négyzetgyökének** azt a pozitív számot nevezzük, amelynek a négyzete a.

A 0 négyzetgyöke 0, negatív szám négyzetgyökét nem értelmezzük.

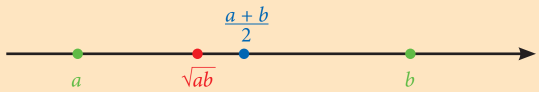
Jelekkel: ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ létezik, nemnegatív, és $(\sqrt{a})^2 = a$. Ha $a < 0$, akkor a $\sqrt{a}$ jel számunkra értelmetlen.

Például

$\sqrt{225} = 15$, mert 225 pozitív szám, 15 is pozitív szám és $15^2 = 225$.

A $\sqrt{-225}$ jel értelmetlen, mert a négyzetgyökjel alatt negatív szám áll.

2. Ha a és b pozitív valós szám, akkor az $\frac{a+b}{2}$ számot a és b **számtani közepének**, a $\sqrt{a \cdot b}$ számot a és b **mértani (geometriai) közepének** nevezzük.
Bebizonyítható (lásd a 36–37. oldalon, az Emelt szintnél):
- Ha $a = b$, akkor a és b számtani és mértani közepe egyenlő $\left(\frac{a+a}{2} = a \text{ és } \sqrt{a \cdot a} = a\right)$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani és mértani közepe egyenlő, akkor maguk a számok is egyenlők.
- Ha $a \neq b$, akkor a és b számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani közepe nagyobb a mértani közepüknél, akkor a két szám nem egyenlő.



Például
a 8 és a 98 számtani közepe: $(8 + 98) : 2 = 106 : 2 = 53$, a mértani közepük: $\sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{784} = 28$.
Látjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértani középnél: $53 > 28$.

GYAKORLÓFELADAT

1. Keressünk egy olyan számot, amelyet ha az 5400 és a 24 helyébe írunk, akkor
- **a)** az $5400 + 24$ összeg nem változik meg;
- **b)** az $5400 \cdot 24$ szorzat nem változik meg!

2. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza 27 cm és 12 cm.
- **a)** Egy négyzet kerülete ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkorák ennek a négyzetnek az oldalai?
- **b)** Egy négyzet területe ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkorák ennek a négyzetnek az oldalai?
- **c)** Az a) és a b) feladatban kapott két négyzet közül melyiknek nagyobb a területe?

3. Jocóéknak téglalap alakú udvaruk van, amelynek nem egyenlő hosszúak az oldalai, Dönciéknek pedig négyzet alakú az udvaruk. Mindkét udvar területe ugyanakkora: 144 m^2. Melyik udvarnak nagyobb a kerülete?

4. Gyula papa azt találta egy banki hirdetésben, hogy a két évre lekötött befektetés esetén mindkét év végén megkapja a **befektetett összeg** 12%-át. Egy másik bankban **kamatos kamatra** lehetne két évre befektetni a pénzt, mindkét évben 12%-os éves kamatot fizetnek. A harmadik bank kétéves befektetés esetén szintén **kamatos kamatot** fizet, az első évre 8% éves kamatot, a második évre pedig 16%-ot. Melyik bank kínálata a legkedvezőbb Gyula papa szerint?

HÁZI FELADAT

1. Januárban Vígh úr üzletében és Bíró úr üzletében is 25 000 Ft volt a télikabát, márciusban mindkét üzletben 16 000 Ft. Bíró úr februárban és márciusban is ugyanannyival csökkentette a kabát árát, Vígh úr pedig februárban ugyanannyi százalékkal csökkentette a januári árát, mint ahány százalékkal márciusban a februárit.
Melyikük üzletében volt olcsóbb a kabát februárban?

2. **a)** Melyik eset a kedvezőbb: ha két hónapban egymás után kétszer 5%-os nettó bérnövekedést érünk el, vagy ha az első hónapban 8%-os, a második hónapban újabb 2%-os nettó bérnövekedést?

b) Két egymást követő évben ugyanannyi százalékos béremelést értünk el. Így ugyanannyival nőtt a bérünk, mintha az első évben 10%-kal csökkent, a második évben pedig 60%-kal nőtt volna. Hány százalékos béremelést értünk el?

3. Töltsd ki a füzetedben a táblázatot pozitív egész számokkal!

a	b	a és b számtani közepe	a és b mértani közepe
96	150		
375			225
	8	68	
50			50
		10	6
		109	60

RÁADÁS

Honnan ered a számtani közép és a mértani közép elnevezés?

<table>
<tr><td>Valaha régen két szám különbségére azt mondták, ez a számok számtani aránya.</td><td>Két szám hányadosára azt mondták, ez a számok mértani aránya.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Például a 9 és a 6 számtani aránya 9 − 6 = 3, a mértani arányuk pedig 9 : 6 = 1,5 volt.</td></tr>
<tr><td>Ha két számtani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy számtani aránypárt.
Például 9 − 6 = 35 − 32, ez egy számtani aránypár.
Itt a két középső szám (a két belső tag) összege éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) összege.</td><td>Ha két mértani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy mértani aránypárt.
Például 9 : 6 = 21 : 14, ez egy mértani aránypár.
Itt a két középső szám (a két belső tag) szorzata éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) szorzata.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Különösen érdekesnek találták akkoriban azokat a számtani és mértani aránypárokat, amelyeknél ugyanaz a szám állt az egyenlőségjel mellett a két oldalon, vagyis a két belső tag egyenlő volt.</td></tr>
<tr><td>Például ilyen a 9 − 6 = 6 − 3 számtani aránypár.
Itt a 6-ot a 9 és a 3 számtani középarányosának nevezték.</td><td>Például ilyen a 9 : 6 = 6 : 4 mértani aránypár.
Itt a 6-ot a 9 és a 4 mértani középarányosának nevezték.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ebben az időben a fogalmakat csak pozitív számokra vonatkozóan alkották meg. (Azonban ezek a közepek bővebb számkörben is értelmezhetők.)
Ha a két egyenlő belső tagot x-szel, a két külső tagot pedig a-val és b-vel jelölték, akkor</td></tr>
<tr><td>az $a - x = x - b$ számtani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és a b számtani középarányosa.
Az $a - x = x - b$ egyenletből: $x = \frac{a+b}{2}$.</td><td>az $a : x = x : b$ mértani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és a b mértani középarányosa.
Az $a : x = x : b$ egyenletből: $x = \sqrt{ab}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A régi elnevezések vége lekopott, így maradt meg a számtani közép és a mértani közép elnevezés.
Hogy honnan ered a nevük, azt mostanáig már csak néhány nagyon öreg ember tudta, de ezentúl már te is tudni fogod!</td></tr>
</table>

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

ELMÉLET

Tétel: Két pozitív szám számtani közepe nem kisebb, mint a mértani közepük.

Bizonyítás

Ha a és b pozitív valós szám, akkor a számtani közepük is pozitív és a mértani közepük is pozitív. Tudjuk továbbá, hogy két pozitív szám közül az a nagyobb, amelynek a négyzete nagyobb.

Azt állítjuk tehát, hogy a és b számtani közepének négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani középük négyzeténél, vagyis $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$.

E helyett az egyenlőtlenség helyett egyszerűbb, vele ekvivalens egyenlőtlenségeket keresünk:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab; \qquad a^2+2ab+b^2 \geq 4ab; \qquad a^2-2ab+b^2 \geq 0; \qquad (a-b)^2 \geq 0.$$

Az utoljára kapott egyenlőtlenség igaz, mert minden valós szám négyzete nemnegatív szám, ezért igaz a vele ekvivalens eredeti állítás is.

Ezzel beláttuk, hogy az összehasonlított két pozitív szám közül a számtani közép négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani közép négyzeténél. Ezért maguk között a számok között is ez a nagyságviszony áll fenn. Az utolsó alak azt is megmutatja, hogy itt egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!

Az a és az $\frac{1}{a}$ számtani közepe: $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)$, a mértani közepe pedig $\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 1$.

Az előbbiekben bebizonyítottuk, hogy a számtani közép nem kisebb a mértani középnél, vagyis $\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) \geq 1$, és ebből 2-vel szorozva megkapjuk a bizonyítandó állítást: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

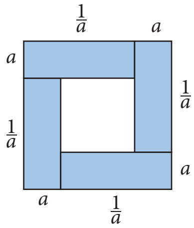
Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{a}$, vagyis ha $a = 1$.

Megjegyzés

– Ha egy **pozitív** szám nem egyenlő 1-gyel, akkor e számnak és a reciprokának az összege nagyobb, mint 2.

– Fentiekből – például (-1)-gyel való szorzás útján – az is következik, hogy ha egy **negatív** szám nem a (-1), akkor e számnak és a reciprokának az összege kisebb (-2)-nél.

2. Olvasd le erről a rajzról, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!



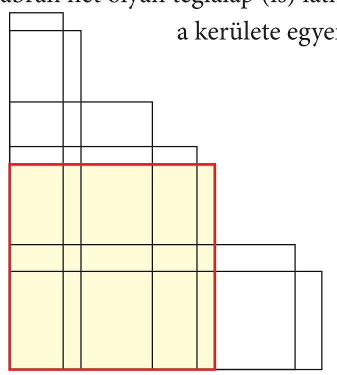
3. Legfeljebb mekkora lehet annak a téglalap alakú teleknek a területe, amelyet 52 m hosszú kerítéssel tudunk körbekeríteni?

Legyen a telek két szomszédos oldalának hossza a méter, illetve b méter. Ekkor $2a + 2b = 52$, vagyis $a + b = 26$, $\frac{a+b}{2} = 13$. Tudjuk azt is, hogy a telek területe ab négyzetméter.

Mivel $169 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, ezért a telek területe nem lehet nagyobb $169\ m^2$-nél.

Ha $a = b = 13$, vagyis négyzet alakú a telek, akkor a területe éppen $169\ m^2$.

Tehát az 52 méter hosszú kerítéssel legfeljebb 169 m^2 területű, téglalap alakú telek keríthető körbe (a telek ekkor négyzet alakú; lásd az ábrát is). [Az ábrán hét olyan téglalap (is) látható, amelyeknek a kerülete egyenlő.]



4. Legalább mekkora annak a téglalap alakú teleknek a kerülete, amelynek területe 100 m^2?