

Komplex feladatok

1. Utazás Budapestre

Boriék Baján laknak, augusztus 18-án Budapestre akarnak utazni a Mesterségek Ünnepére. Bori azt a feladatot kapja szüleitől, hogy nézzen utána: vonattal vagy autóval érdemesebb-e utazni? Bori 13, öccse, Bence 11 éves, velük utazik Bori 67 éves nagymamája is, így összesen öten vesznek részt a programon.



Ha autóval utaznak, akkor az út lehető legnagyobb részét autópályán szeretnék megtenni, továbbá Bori édesapja a fővárosban nem szeret vezetni, így szívesen letenné az autót az ingyenes kelenföldi P+R parkolóban, ahonnan tömegközlekedéssel utaznának tovább. Autójuk átlagfogyasztása ilyen utak alkalmával 8,2 liter 100 kilométeren, a benzin ára az utazáskor 332 Ft/liter.

Ha vonattal mennek, akkor a legfontosabb szempont, hogy ne kelljen átszállni. Helyjegyet is vásárolnak, 2. osztályon utaznak. Budapesten belül rövid, 1–2 kilométeres távolságokat szívesen megtesznek gyalog. Bori papája teljes árú jeggyel utazik, mamája tanárként jogosult 50%-os kedvezményre.



- a) Nézz utána, hogy hol zajlik minden évben a Mesterségek Ünnep!
- b) Hasonlítsd össze az autóval, illetve a vonattal történő utazás esetén az utazási költségeket (oda-vissza)!
Az utazási költségek kiszámításához vedd figyelembe a következőket:
 - autóval utazás esetében: átlagos fogyasztás, autópálya matrica díja, budapesti tömegközlekedés díja;
 - vonattal utazás esetében: vonatjegy (a megfelelő kedvezményekkel), budapesti tömegközlekedés díja (ha szükséges).
- c) Feladatverzió: A teljesárú vonatjegy Budapest és Baja között (helyjeggyel együtt) 3310 Ft-ba, az 50%-os 1750 Ft-ba kerül (a helyjegy árára nem vonatkozik a kedvezmény). Mennyibe kerül a helyjegy?

Megoldás-vázlat az 1. feladathoz (2016-ban):

- a) A Mesterségek Ünnepe a Budai Várban zajlik (<http://www.mestersegekunnepe.hu/>).
- b) **Vonat:** ha átszállás nélkül szeretnének utazni, akkor erre 2016. augusztus 18-án egyetlen lehetőségük van: 6:04-kor indul egy szerelvény Bajáról, ami 8:44-re ér Budapesten a Déli pályaudvarra. Visszafelé 17:15-kor indul a vonat, és 19:51-re ér Bajára. Ezekkel a vonatokkal az utazás költségei (helyjeggyel együtt) egy útra:
Bori papája: 3310 Ft-ot; Bori mamája, Bori és Bence 1750 Ft-ot fizet (a 180 forintos helyjegyre nem jár a kedvezmény); Bori nagymamájának csak a 180 forintos helyjegyet kell megvennie. (forrás: <http://elvira.mav-start.hu/>) Így, összesen egy útra 8740 Ft, oda-vissza **17 480 Ft**-ba kerül az út.
A Déli pályaudvarról gyalog kevesebb, mint 2 kilométer a Vár, így további költségük nincs. (forrás: google.hu/maps)
Autó: az M6-os autópályán keresztül Bajáról Kelenföldig 184 km az út, ez alatt az autó $1,84 \cdot 8,2 \approx 15$ liter benzint fogyaszt, ami kb. 5000 Ft-ba kerül, oda-vissza tehát a benzinköltség 10 000 Ft. A legolcsóbb, tíznapos autópálya matrica 2016-ban 2975 Ft-ba kerül. (<http://www.autopalyamatrica.hu/>)
A budapesti tömegközlekedéssel a legolcsóbban a 19 jelű villamossal juthatnak el Kelenföldről a vár közelébe (<http://www.bkk.hu>). Ez ötüknek oda-vissza 10 darab vonaljegyet jelent, amihez a legolcsóbban egy gyűjtőjegy megvásárlásával tudnak hozzájutni, melynek ára 3000 Ft.
Autózás esetén tehát az összköltség kb. **16 000 Ft**, ami némileg kevesebb, mint a vonattal utazás költsége. (Persze ebbe nem számoltuk bele az autó értékvesztésével járó kiadást.)
- c) A helyjegy árát jelölje x , a felírható egyenlet: $0,5 \cdot (3310 - x) = 1750 - x$, amiből $x = 190$ Ft. (Érdekes, hogy az eredmény eltér a valóságos 180 Ft-tól. Ennek oka valószínűleg az, hogy az 50%-os jegyár számításakor a MÁV 10 Ft-ra, felfelé kerekít.)

2. Közlekedés Budapesten

Bori, Bence, a szüleik és a nagymamájuk (összesen tehát öten) egy másik alkalommal újra Budapestre látogatnak. Terveik között öt nevezetesség meglátogatása szerepel: Szent István-bazilika, Operaház, Állatkert, Hősök tere, Vajdahunyad vár.

A Bazilika és az Operaház, illetve a másik három látnivaló közel vannak egymáshoz, ezért az első kettőt és az utóbbi hármat valamilyen sorrendben egymás után szeretnék megtekinteni.

a) Hányféle sorrendben látogathatják meg az öt épületet?

Végül a következő sorrend mellett döntenek: Vajdahunyad vár, Hősök tere, Állatkert, Bazilika, Operaház. Minden épület előtt két fotót csinálnak, minden képen ketten lesznek rajta.

b) Tudnak-e úgy képeket csinálni, hogy az elkészült fotók közül semelyik kettőn nem lesz ugyanaz a két személy rajta?

Borinak nagyon megtetszik az Operaház épülete. Szerencsére kapható az épület méretarányos makettje, a felirat szerint a méretarány 1:200. Bori bizonytalan abban, hogy a kész makett el fog-e otthon férni a polcán, amely emlékei szerint 60 cm széles és 30 cm mély.

c) Nézz utána az Operaház valódi méreteinek, és állapítsd meg, hogy a makett el fog-e férni a polcon!

Megoldás-vázlat a 2. feladathoz

- a) A Bazilika és az Operaház kétféle, a másik három nevezetesség hatféle sorrendben látogatható meg. Az is kétféleképpen választható ki, hogy az első kettőt vagy az utóbbi hármat látogatják meg először. Így az összes lehetőség száma: $2 \cdot 6 = 24$.
- b) Öt személy közül kettőt 10-féleképpen lehet kiválasztani. Így elképzelhető, hogy a készülő 10 kép mindegyikén másik páros szerepel.
- c) Az Operaház méretei:
- legnagyobb hossza: 113,22 méter;
 - legnagyobb szélessége: 59,06 méter;
 - az épület legmagasabb pontja 50,69 méterre van az utcaszint felett.

(forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Magyar_Állami_Operaház)

Így a makett méretei:

- legnagyobb hossza: 56,5 cm;
- legnagyobb szélessége: 29,5 cm;
- magassága 25,3 cm.

Így a polcon elfér a makett alapterülete.

3. Az Országház (másik nevén Parlament) épületéről az alábbi információkat találta Bori az Interneten:

Az építkezés 1885-től 1904-ig tartott. Az első kapavágás 1885. október 12-én történt a Tömő tér talaján, az építkezés során tizenhét éven keresztül átlagosan ezer ember dolgozott, 176 000 köbméternyi földet mozgattak meg; 40 millió téglát, félmillió díszkövet használtak fel. Maga az épület 268 m hosszú, 123 m széles és 96 m magas, alapterülete 17 745 négyzetméter, térfogata 473 000 köbméter. Központi eleme a kupola, amelynek két oldalán emelkedik a képviselőház (ma az Országgyűlés) és a volt főrendiház (ma Kongresszusi terem) ülésterme. Az épületnek 27 kapuja van, belül 29 lépcsőház, valamint 13 személy- és teherlift szolgálja a közlekedést és a szállítást. Az épületben valamivel több, mint 200 irodahelyiség található. A Duna felőli oldal a főhomlokzat, de a hivatalos főbejárat a Kosuth térről nyílik. Kívül 90, belül 152, összesen 242 szobor van a falakon, továbbá jeles alkotók freskói, festményei is ékesítik az Országházat. A díszítéseknél felhasznált 22 karátos arany össz mennyisége hozzávetőleg 40 kilogramm.



(forrás: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Országház>)

Feladatok:

- Nézz utána, hogy miért pont 96 méter magas a Parlament!
- Nézz utána a Kheopsz-piramis méreteinek, és számítsd ki, hogy a Parlament térfogata hány százaléka a Kheopsz-piramis térfogatának!
- Mekkora lenne egy akkora piramis alapélének a hossza, amelynek a térfogata és a magassága ugyanakkora, mint a Parlament térfogata, illetve magassága?
- Nézz utána, hogy mit jelöl az arany karátszáma! Számítsd ki, hogy hány kilogramm tiszta aranyat használtak fel az Országház építésekor!

A Parlamentben ülésezik a magyar Országgyűlés 199 tagja. Az ülésterem első öt sorában a második sortól kezdve minden sorban hattal több szék van, mint az előző sorban. Az első öt sorban összesen 220 szék található.

- Hány szék van az ülésterem első sorában?



Megoldás-vázlat a 3. feladathoz

- a) A 896. évi honfoglalás (illetve ennek 1896. évi évfordulója) tiszteletére.
- b) A Kheopsz-piramis egy olyan négyzet alapú gúla, melynek alapéle kb. 230 m, magassága kb. 138 m, térfogata kb. $2\,433\,400\text{ m}^3$. A Parlament térfogata ennek kb. 19,4%-a.
- c) A felírható összefüggés (ha a kérdéses gúla alapélének hosszát a -val jelöljük):
$$\frac{a^2 \cdot 96}{3} = 473000, \text{ amiből } a \approx 121,6 \text{ méter.}$$
- d) A karát az aranyötvözet finomsági fokának megjelölésére szolgáló mértékegység. A „tisza arany” 24 karátos. 40 kg $\frac{22}{24}$ -ed része kb. $36,7\text{ kg}$.
- e) Az egymás mögötti sorokban elhelyezkedő székek száma számtani sorozatot alkot. Felírható a következő egyenlet: $\frac{2 \cdot a_1 + 4 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 220$, amiből $a_1 = 32$, vagyis az első sorban 32 ülés található. (A valóságban 30, mert 1-1 szék hiányzik az első sor két végén.)

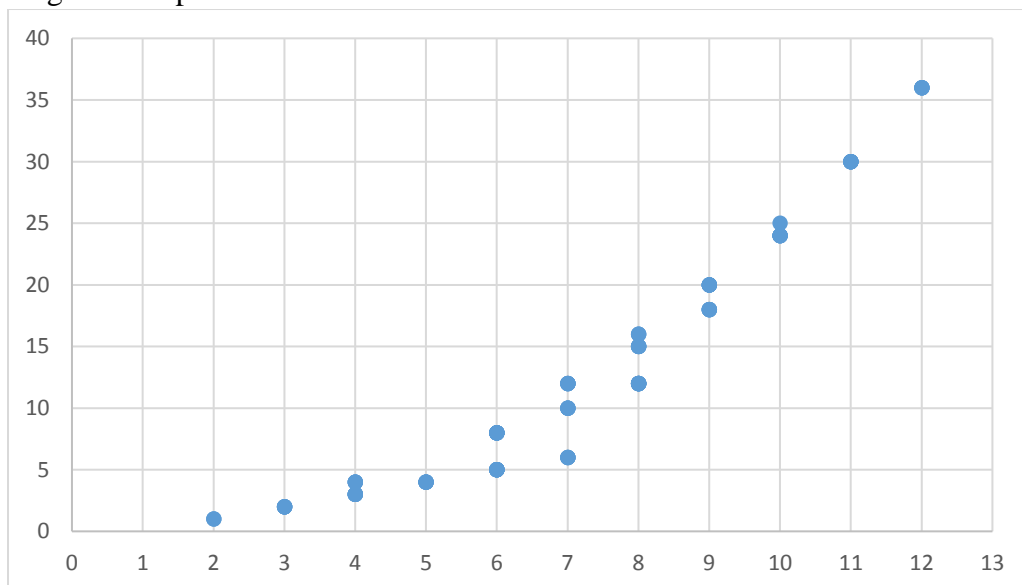
4. Dobjatok fel két szabályos dobókockát egyszerre összesen 100-szor! A dobott számokat jegyezzétek fel egy táblázatba. (A konkrét dobásokat helyettesíthetitek az Excel program megfelelő függvényének segítségével: VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;6).)



A táblázatba írjátok be a két dobott szám összegét és szorzatát is!

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------|-----------|----------|----------|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Egyik dobás | 4 | 5 | 2 | 5 | ... | | | | | | | | | | | | | | |
| Másik dobás | 5 | 6 | 3 | 1 | ... | | | | | | | | | | | | | | |
| Összeg | 9 | 11 | 5 | 6 | ... | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Szorzat</i> | 20 | 30 | 6 | 5 | ... | | | | | | | | | | | | | | |

- Számoljátok össze, hogy a 100 dobásból hányszor lett az összeg 2, 3, ... 12. (Használjátok az Excel DARABTELI függvényét!) Ábrázoljátok oszlopdigrammal az összegek eloszlását!
- Add meg a következő események relatív gyakoriságát és számítsd ki a valószínűségeket!
 - A két dobás egyenlő.
 - A két dobás összege 6.
 - A két dobás szorzata 7.
 - A két dobás szorzata prímszám.
 - A két dobás szorzata páros szám.
- Dani a kapott táblázattal dolgozva az Excel diagram varázslója segítségével a következő diagramot kapta:

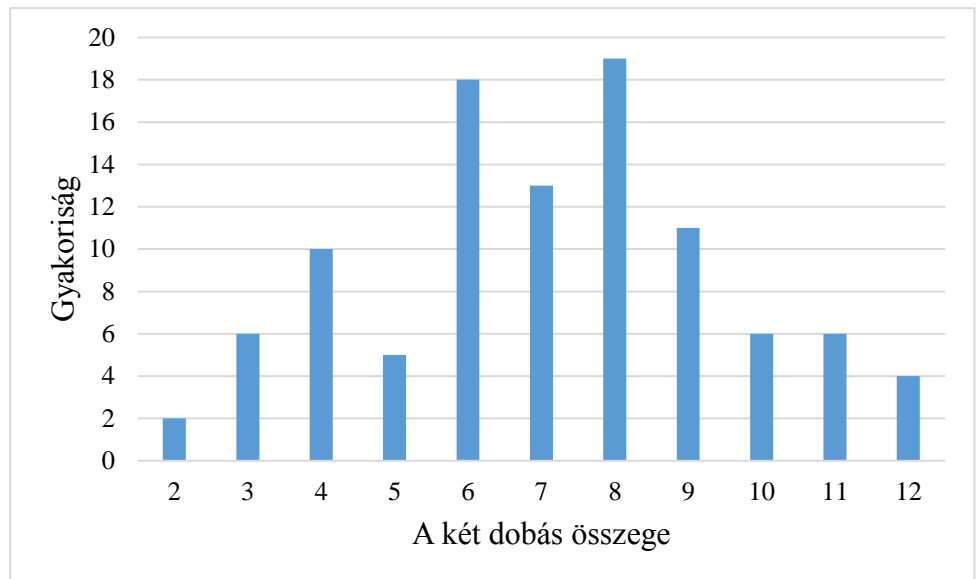


Segíts Daninak a diagram értelmezésében! Milyen nevet lehet adni a vízszintes és a függőleges tengelynek?

Megoldás-vázlat a 4. feladathoz

- a) Egy lehetséges dobássorozat után kitöltött táblázat és hozzá tartozó oszlopdiagram a következő:

| Összeg | Gyakoriság |
|--------|------------|
| 2 | 2 |
| 3 | 6 |
| 4 | 10 |
| 5 | 5 |
| 6 | 18 |
| 7 | 13 |
| 8 | 19 |
| 9 | 11 |
| 10 | 6 |
| 11 | 6 |
| 12 | 4 |



- b) A relatív gyakoriságokat a táblázatból kapjuk.

A valószínűségek esetén az összes eset mindig $6 \cdot 6 = 36$.

A két dobás 6 esetben egyenlő; a két dobás összege 5-féleképpen lehet 6 (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1); a két dobás szorzata nem lehet 7; a két dobás szorzata akkor lehet prímszám, ha az egyik kockával 1-est, a másik kockával pedig 2-est, 3-ast vagy 5-öst dobunk; a két dobás szorzata akkor páros, ha legalább az egyik dobott szám páros.

A kérdéses események relatív gyakorisága és valószínűsége táblázatba foglalva:

| | Relatív gyakoriság | Valószínűség |
|----------------------------------|-------------------------|---------------------------------------------------------|
| A két dobás egyenlő. | $\frac{14}{100} = 0,14$ | $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ |
| A két dobás összege 6. | $\frac{17}{100} = 0,17$ | $\frac{5}{36} = 0,13\bar{8}$ |
| A két dobás szorzata 7. | 0 | 0 |
| A két dobás szorzata prímszám. | $\frac{20}{100} = 0,2$ | $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ |
| A két dobás szorzata páros szám. | $\frac{76}{100} = 0,76$ | $\frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{36} = 0,75$ |

- c) Dani diagramja azokat a pontokat tartalmazza, melyek első koordinátája dobott számok összege (vízszintes tengely felirata), második koordinátája a dobott számok szorzata (függőleges tengely felirata).

5. Gyors, közelítő számítások, becslések

Az alábbi feladatok megoldásához sem számológép, sem (a feladat szövegében nem említett) más eszköz nem használható.

a) Egy nagy, félgömb alakú tál szinte teli van gyümölcslevessel. Hogyan lehet gyorsan megbecsülni, hogy összesen hány (szintén félgömb alakú) merőkanállal lehet belőle szedni?

b) Egy nagy kupac tülevélről kell eldöntenünk, hogy nagyságrendileg hány darab lehet benne. Mit tegyünk?

c) Egy fa magasságát szeretnénk megbecsülni az araszunk és a karunk hosszának, továbbá a fa távolságának ismeretében. Hogyan számoljunk?

d) A rulett játékban a játékosoknak el kell találniuk, hogy a krupié következő pörgetésénél melyik (0 és 36 közé eső) egész számnál áll meg a golyó. 18 szám „fekete”, és 18 szám „piros” (a 0 általában zöld háttérű). Az asztal mellett ki szokták írni, hogy milyen számokat pörgettek ki az előző körökben. Egy alkalommal azt látjuk, hogy az előző öt pörgetés mindegyike „piros” volt. Milyen szint érdemes megjátszani a következő körben?



e) Ki tudod-e számolni fejben, hogy mekkora a területe egy olyan téglalapnak, amelyiknek egyik oldala 91 cm, másik oldala 109 cm?

Megoldás-vázlat az 5. feladathoz

a) Meg kell nézni, hogy a merőkanál átmérője hányszor „mérhető fel” a tál átmérőjére. Ha például 4-szer, akkor a tál sugara 4-szerese a merőkanál r sugarának. Így térfogata

$$\frac{(4r)^3 \pi}{2} = 64 \cdot \frac{r^3 \pi}{2}, \text{ azaz 64-szerese a merőkanál átmérőjének. Azaz kb. 64 merőkanállal}$$

lehet belőle szedni.

b) Egy lehetséges módszer, hogy tízszer elfelezzük a kupacot, az így kapott kis kupac kb. $2^{10} \approx 1000$ -ed annyi tülevelet tartalmaz, mint az eredeti. Az ebben lévő tülevelek számát megszámlálva az eredeti darabszám nagyságrendje jól becsülhető.

c) Úgy kell elhelyezkednünk, hogy kinyújtott karunk (hosszát jelölje k) végén kinyitott araszunk (hossza legyen a) pont akkora legyen a szemünkben, mint a kérdéses fa. Ekkor a fa távolsága (t) ismeretében a következő képlet segítségével becsülhető a fa magassága

$$(m): \frac{a}{k} = \frac{m}{t}.$$

d) Mindegy. A rulettben a következő gurítás eredménye nem függ az előző gurítások eredményétől, így továbbra is $\frac{18}{37} (< 0,5)$ valószínűséggel lesz a dobás eredménye piros, és ugyanekkora valószínűséggel lesz fekete.

e) $91 \cdot 109 = (100 - 9)(100 + 9) = 100^2 - 9^2 = 10000 - 81 = 9919 \text{ cm}^2$.